

线性代数课程教案与讲义

第一讲：二阶与三阶行列式的定义、基本类型、性质及几何意义

授课教师：线性代数教学组

2026 年 9 月 9 日

目录

1 教学目标与核心意义	3
1.1 为什么这很重要	3
1.2 教学目标	3
2 二阶行列式的核心概念与计算	3
2.1 二阶行列式的符号表示	3
2.2 主对角线与副对角线法则	3
2.3 方程求解例题	4
2.4 二阶行列式绝对值的几何意义：平行四边形面积	4
3 三阶行列式的定义与计算	5
3.1 三阶行列式的代数定义	5
3.2 叉积的定义与行列式表示	6
3.3 三阶行列式绝对值的几何意义：平行六面体体积	8
4 以三阶行列式为基础例子的行列式基本类型	9
4.1 对角行列式 (Diagonal Determinant)	9
4.2 上三角行列式 (Upper Triangular Determinant)	9
4.3 下三角行列式 (Lower Triangular Determinant)	10
5 行列式的基本性质	10
5.1 性质 1：行向量组或列向量组线性相关时，行列式为 0	10
5.2 性质 2：交换两行或两列，行列式变号	10
5.3 性质 3：转置行列式值不变	10

5.4 性质 4: 数乘性质	11
--------------------------	----

1 教学目标与核心意义

1.1 为什么这很重要

在接下来的线性代数学习中，二阶与三阶行列式是重要的基础工具。它们不仅是利用克拉默法则求解二元与三元线性方程组的基础，也是后续学习特征值以及解析几何中叉积、混合积等内容的基础。熟练掌握其符号表示、计算方法、特殊类型及基本性质，有助于理解线性代数中的许多核心概念。

1.2 教学目标

- 掌握二阶与三阶行列式的定义、符号表示及其计算方法（对角线法则、Sarrus 法则与全排列求和）。
- 掌握对角行列式、上三角行列式及下三角行列式的结构特征与快速计算方法。
- 理解并熟练运用行列式的基本性质（线性相关时行列式为零、交换两行或两列后变号、转置不变性、数乘公式等）。
- 理解二阶与三阶行列式的几何意义，并掌握相应的数学推导。
- 学会利用行列式求解含未知数的代数方程。

2 二阶行列式的核心概念与计算

2.1 二阶行列式的符号表示

二阶行列式是由 4 个数排成 2 行 2 列的数表，并用两条竖线括起来。例如，由 a, b, c, d 四个数组成的二阶行列式记作：

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

其中， a, b 位于第一行， c, d 位于第二行； a, c 位于第一列， b, d 位于第二列。数 a, b, c, d 称为行列式的元素。

2.2 主对角线与副对角线法则

计算二阶行列式的值，可以使用对角线法则：

- **主对角线**：从左上角到右下角，包含元素 a 和 d 。
- **副对角线**：从右上角到左下角，包含元素 b 和 c 。

计算规则可概括为：主对角线元素之积减去副对角线元素之积。

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

2.3 方程求解例题

例题 3：一元一次行列式方程

求解方程：

$$\begin{vmatrix} x & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 10, \quad \Rightarrow x = 4$$

例题 4：一元二次行列式方程

求解方程：

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 \\ 3 & x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+2) = 0 \Rightarrow x_1 = 3, \quad x_2 = -2.$$

2.4 二阶行列式绝对值的几何意义：平行四边形面积

定理说明 设平面直角坐标系中的两个列向量为：

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$$

这两个向量构成的二阶行列式为：

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

该行列式的绝对值 $|D| = |ad - bc|$ 等于由列向量 $\vec{u}$ 和 $\vec{v}$ 所张成的平行四边形的面积 S 。

严格推导过程

1. **利用向量点积与模长公式：**若 $\vec{u}$ 或 $\vec{v}$ 为零向量，则等式两边均为 0，结论显然成立。以下设二者均为非零向量，并令 $\theta \in [0, \pi]$ 为它们的夹角。平行四边形的面积为：

$$S = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta$$

因为 $\theta \in [0, \pi]$ ，所以 $\sin \theta \geq 0$ ，从而 $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$ 。代入得：

$$S = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{\|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - (\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta)^2}$$

2. 代入向量点积：注意到向量点积定义为 $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$ ，故面积可表示为：

$$S = \sqrt{\|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2}$$

3. 代入列向量坐标计算：已知 $\|\vec{u}\|^2 = a^2 + c^2$ ， $\|\vec{v}\|^2 = b^2 + d^2$ ， $\vec{u} \cdot \vec{v} = ab + cd$ 。代入展开：

$$\begin{aligned} S^2 &= (a^2 + c^2)(b^2 + d^2) - (ab + cd)^2 \\ &= (a^2b^2 + a^2d^2 + c^2b^2 + c^2d^2) - (a^2b^2 + 2abcd + c^2d^2) \\ &= a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2 \\ &= (ad - bc)^2 \end{aligned}$$

4. 开平方得出结论：两边取算术平方根，可得：

$$S = \sqrt{(ad - bc)^2} = |ad - bc| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

证毕。

3 三阶行列式的定义与计算

3.1 三阶行列式的代数定义

设三维列向量为

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}.$$

以 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 为列向量构成的三阶行列式为

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

该行列式的值是取自不同行、不同列的三个元素乘积的代数和，将其完全展开，得到

$$D = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - b_1a_2c_3 - a_1c_2b_3$$

注记：

注记

- D 的公式可以按照第一行展开得到:

$$\begin{aligned} D &= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) \\ &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

- Sarrus 对角线记忆法:

带正号的三项:

$$a_1b_2c_3, \quad b_1c_2a_3, \quad c_1a_2b_3.$$

带负号的三项:

$$c_1b_2a_3, \quad b_1a_2c_3, \quad a_1c_2b_3.$$

3.2 叉积的定义与行列式表示

设三维空间中的两个向量为:

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \quad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

其叉积 (向量积) $\vec{a} \times \vec{b}$ 是一个同时垂直于 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的向量。当二者不共线时, 其方向由右手定则确定。

下面是公式推导过程

步骤 1: 单位基向量的叉积性质 根据叉积的几何意义 (模长等于平行四边形面积, 方向遵循右手定则), 基向量满足:

- 同向相乘为零: $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$
- 异向反对称性:

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \times \mathbf{j} &= \mathbf{k}, & \mathbf{j} \times \mathbf{i} &= -\mathbf{k} \\ \mathbf{j} \times \mathbf{k} &= \mathbf{i}, & \mathbf{k} \times \mathbf{j} &= -\mathbf{i} \\ \mathbf{k} \times \mathbf{i} &= \mathbf{j}, & \mathbf{i} \times \mathbf{k} &= -\mathbf{j} \end{aligned}$$

步骤 2: 代数展开与化简 利用叉积对向量加法的分配律及其对数乘的相容性展开:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \times (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) \\ &= a_1b_2\mathbf{k} - a_1b_3\mathbf{j} - a_2b_1\mathbf{k} + a_2b_3\mathbf{i} + a_3b_1\mathbf{j} - a_3b_2\mathbf{i} \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k} \end{aligned}$$

写成坐标形式即为最终公式：

三维向量叉积坐标公式

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

利用三阶行列式的形式展开，可将其记为：

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

其中 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 为沿 x, y, z 轴正方向的单位基向量。

叉积公式的几何意义

$$S_{\vec{a}, \vec{b}} = \|\vec{a} \times \vec{b}\|$$

由叉积的坐标公式可知

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1).$$

因此

$$\begin{aligned} \|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 \\ &\quad + (a_1b_2 - a_2b_1)^2. \end{aligned}$$

将右端展开并整理，得到

$$\begin{aligned} \|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \\ &\quad - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2. \end{aligned}$$

注意到

$$\|\vec{a}\|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2, \quad \|\vec{b}\|^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2,$$

并且

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \theta.$$

所以

$$\begin{aligned} \|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 &= \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \\ &= \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 \cos^2 \theta \\ &= \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 (1 - \cos^2 \theta) \\ &= \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

3.3 三阶行列式绝对值的几何意义：平行六面体体积

定理说明 设三维空间中的三个列向量为：

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

由这三个列向量构成的三阶行列式为：

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

该行列式的绝对值 $|D|$ 等于由向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 所张成的平行六面体的体积 V 。

严格推导过程

1. 利用向量混合积与几何体积定义：平行六面体的体积等于底面积乘以高。

- 以 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 张成的平行四边形为底，其面积向量为 $\vec{a} \times \vec{b}$ ，因此底面积为 $S_{\text{底}} = \|\vec{a} \times \vec{b}\|$ 。
- 若 $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ ，则底面积、体积和相应的行列式均为 0，结论成立。以下设 $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{0}$ 。平行六面体的高 h 为向量 $\vec{c}$ 在底面法向量方向上的投影长度：

$$h = \|\vec{c}\| |\cos \phi|$$

其中 ϕ 为 $\vec{c}$ 与 $\vec{a} \times \vec{b}$ 的夹角。

因此，平行六面体的体积可写为向量的混合积（Scalar Triple Product）：

$$V = S_{\text{底}} \cdot h = \|\vec{a} \times \vec{b}\| \|\vec{c}\| |\cos \phi| = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$$

2. 代入坐标计算混合积：根据叉积的坐标公式：

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$$

将 $\vec{a} \times \vec{b}$ 与 $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ 作点积：

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = c_1(a_2b_3 - a_3b_2) + c_2(a_3b_1 - a_1b_3) + c_3(a_1b_2 - a_2b_1)$$

3. 对照三阶行列式按列展开：考虑以 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 为列构成的三阶行列式 D ：

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

将该行列式按照第三列 $\vec{c}$ 进行余子式展开：

$$D = c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

展开二阶行列式：

$$D = c_1(a_2b_3 - a_3b_2) - c_2(a_1b_3 - a_3b_1) + c_3(a_1b_2 - a_2b_1)$$

对比可知，这与混合积 $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ 的结果完全一致：

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = D$$

4. 得出最终结论：平行六面体的体积为：

$$V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = |D| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

证毕。

4 以三阶行列式为基本例子的行列式基本类型

某些特殊结构的行列式可以直接由主对角线元素求值，无需逐项展开。下面以三阶行列式为例进行说明。

4.1 对角行列式（Diagonal Determinant）

若行列式中主对角线以外的所有元素均为 0，则称该行列式为**对角行列式**。其值等于主对角线上所有元素的乘积：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$$

4.2 上三角行列式（Upper Triangular Determinant）

若主对角线下方的所有元素全为 0，则称其为**上三角行列式**。其值同样等于主对角线上所有元素的乘积：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$$

4.3 下三角行列式 (Lower Triangular Determinant)

若主对角线上方的所有元素全为 0，则称其为下三角行列式。其值同样等于主对角线上所有元素的乘积：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$$

结论

对于任意 n 阶对角行列式、上三角行列式或下三角行列式，其值均为主对角线元素之积：

$$D = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

5 行列式的基本性质

设 $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$ 为 n 阶方阵，其中 $\vec{a}_i$ 表示第 i 个列向量，并记 $D = \det(A)$ 。行列式满足以下重要性质：

5.1 性质 1：行向量组或列向量组线性相关时，行列式为 0

若行列式的列向量组线性相关，例如其中两列成比例，或某一列可表示为其余列的线性组合，则行列式的值为 0。相同结论也适用于行向量组。在二维情形中，这对应两个向量共线；在三维情形中，这对应三个向量共面。

几何解释： 向量线性相关意味着它们张成的几何图形发生退化。例如，三维平行六面体退化在某个平面内，因而体积为 0。

5.2 性质 2：交换两行或两列，行列式变号

交换行列式中的任意两行或两列，行列式的值变为原来的相反数。例如，交换第一列与第二列后有：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

5.3 性质 3：转置行列式值不变

将矩阵 A 的行与列互换得到转置矩阵 A^T ，其行列式与原矩阵的行列式相等：

$$\det(A^T) = \det(A).$$

意义： 这表明行列式中“行”与“列”具有对等的地位，关于列的性质也有相应的行版本。

5.4 性质 4：数乘性质

- 某一行或列乘以常数：若行列式中某一行或某一列的所有元素同乘以常数 k ，则所得行列式的值等于原行列式的值乘以 k 。例如，将第一列乘以 k ，有

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

- 整个矩阵乘以常数：若 A 是一个 $n \times n$ 矩阵，则 kA 的每一行都等于 A 的对应行乘以 k 。因此

$$\det(kA) = k^n \det(A).$$

特别地，对三阶矩阵有 $\det(kA) = k^3 \det(A)$ 。