

高等代数课堂讲义

第二章 行列式

Determinants

本讲义依据《高等代数（第六版）》第二章“行列式”（教材第34–72页）的术语、章节逻辑、定义、定理和典型例题整理。正文面向学生阅读，强调概念的来源、结论的证明与计算方法，不采用教案体例。

XeLaTeX 可编译版本

阅读说明

本章从线性方程组的求解出发，引入二阶、三阶行列式，继而用排列及其奇偶性给出一般的 n 阶行列式。之后依次讨论行列式的性质、计算、按一行或一列展开、克拉默法则，以及拉普拉斯定理和行列式的乘法规则。

学习时应把握两条主线：

- **定义线索：**排列的奇偶性决定行列式展开式中每一项的符号；
- **计算线索：**利用初等变换把行列式化为三角形，或利用零元素较多的行、列作展开。

第二章 行列式

§1 引言

解方程是代数中的基本问题。对于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \quad (2.1)$$

当

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$$

时，方程组有唯一解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

将分母写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

就得到二阶行列式。于是方程组的解可记为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

三元线性方程组中出现的分母是三阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

本章的目标是把这种结构推广到 n 元线性方程组，并说明它为什么能够刻画唯一解。

观察

二阶和三阶行列式的每一项都从每一行、每一列各取一个元素相乘。所有可能的取法都出现一次，而每一项前的正负号由列指标排列的奇偶性决定。

§2 排列

定义 1 由 $1, 2, \dots, n$ 组成的一个有序数组称为一个 n 阶排列。

例如，2431 是一个 4 阶排列，45321 是一个 5 阶排列。 n 阶排列共有

$$n(n-1)\cdots 2 \cdot 1 = n!$$

个。排列 $12\cdots n$ 称为自然顺序。

定义 2 在一个排列中，如果一对数的前后位置与大小顺序相反，即前面的数大于后面的数，那么它们称为一个**逆序**。一个排列中逆序的总数称为该排列的**逆序数**，记作

$$\tau(j_1 j_2 \cdots j_n).$$

例如，在排列 2431 中，逆序为 $(2, 1), (4, 3), (4, 1), (3, 1)$ ，故

$$\tau(2431) = 4.$$

计算逆序数时，可以依次统计每个数右边比它小的数的个数，再求和。

定义 3 逆序数为偶数的排列称为**偶排列**；逆序数为奇数的排列称为**奇排列**。

把一个排列中两个数的位置互换，其余数不动，称为一次**对换**。

定理 1 对换改变排列的奇偶性。

证明. 先看两个被换的数相邻的情形。考虑

$$\cdots jk \cdots \rightsquigarrow \cdots kj \cdots$$

(1) 若 j, k 与其他的数（不）构成逆序，经过相邻对换后与其他数依然（不）构成逆序；(2) 若 jk 构成逆序，则 kj 不构成逆序；若 jk 不构成逆序，则 kj 构成逆序。所以兑换后逆序数增减 1，排列奇偶性改变。

若两个数不相邻，设它们之间有 s 个数，如

$$\cdots j i_1 i_2 \cdots i_s k \cdots$$

把右边 k 逐位移到左边变成 $\cdots k j i_1 i_2 \cdots i_s \cdots$ ，需要 $s+1$ 次相邻对换，再把 j 移回 k 原来的位置需要 s 次相邻对换，总共 $2s+1$ 次。这个数是奇数，故奇偶性仍然改变。□

例 2.2.1 求排列 45321 的逆序数并判断奇偶性。

解. 各位置贡献的逆序数依次为 3, 3, 2, 1, 0, 故

$$\tau(45321) = 3 + 3 + 2 + 1 = 9.$$

因此 45321 是奇排列。 □

§3 n 阶行列式

从本节起固定一个数域 $\mathbb{P}$, 所讨论的数均属于 $\mathbb{P}$ 。

定义 4 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

等于所有取自不同行、不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

的代数 sum, 其中 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 遍历 $1, 2, \dots, n$ 的全部排列; 当该排列为偶排列时取正号, 为奇排列时取负号。即

$$D = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}. \quad (2.2)$$

公式 (2.2) 称为行列式的展开式。它共有 $n!$ 项。若把一项写成任意行指标次序

$$a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n},$$

则其符号为

$$(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)}. \quad (2.3)$$

这是因为交换两个因子的书写位置时, 行指标排列与列指标排列同时发生一次对换, 二者逆序数之和的奇偶性不变。

根据提公因子的原则, 我们得到行列式按一行或者一列展开的公式:

$$\begin{aligned} D &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \cdots + a_{in} A_{in} \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij} = a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \cdots + a_{nj} A_{nj}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

其中 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, M_{ij} 为去掉 a_{ij} 所在行与列后得到的 $(n-1)$ 阶行列式。

计算中选取零元素较多的行或者列展开以简化计算。

例 2.3.1 (反对角型行列式) 计算

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

解. 非零项只能是 $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$, 对应列指标排列 4321。其逆序数为 6, 是偶数, 所以

$$D = (-1)^6(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) = 24.$$

□

例 2.3.2 (三角形行列式) 上三角形行列式满足

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}. \quad (2.5)$$

证明. 由最后一行开始逐行考察, 若某一项不为零, 则必须依次有 $j_n = n, j_{n-1} = n-1, \dots, j_1 = 1$ 。因此展开式中仅主对角线乘积不为零, 且自然排列为偶排列。□

主对角线外元素全为零的行列式称为**对角形行列式**, 特别有

$$\begin{vmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{vmatrix} = d_1 d_2 \cdots d_n, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

§4 n 阶行列式的性质

直接按定义计算 n 阶行列式需要处理 $n!$ 项, 实际计算必须依靠结构与变换。

把行列式的行与列互换所得的行列式称为原行列式的**转置行列式**。

性质 1 (行列互换, 行列式不变)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明. 转置后, 原展开式中按行指标自然排列的一项, 变成按列指标自然排列的同一组因子。由公式 (2.3), 两者符号相同。□

性质 1 说明：关于行的结论都有完全对应的列版本。以下通常只陈述行的形式。

性质 2 (一行的公因子可以提出) 用数 k 乘行列式的某一行，所得行列式等于原行列式的 k 倍。特别地，如果行列式中有一行为零，则行列式为零。

证明. 设乘以 k 的行为第 i 行，按照该行展开，行列式的每一项都恰含该行的一个元素，因而每一项都带有因子 k 。□

性质 3 (对一行的线性性 (分配率)) 如果某一行是两组数的和，则行列式等于两个行列式的和，而这两个行列式除该行外都与原行列式相同：

$$\begin{vmatrix} \cdots & & \\ b_1 + c_1 & \cdots & b_n + c_n \\ \cdots & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdots & & \\ b_1 & \cdots & b_n \\ \cdots & & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdots & & \\ c_1 & \cdots & c_n \\ \cdots & & \end{vmatrix}.$$

证明. 按该行分组，每个系数 A_{ij} 与该行元素无关。利用分配律展开即可。□

性质 4 (两行相同则行列式为零) 如果行列式中有两行相同，那么行列式为零。

证明. 展开式中的每一项都可与另一项配对：只交换这两行所取元素的列指标。两项数值相同，而列指标排列相差一次对换，符号相反，故两两相消。具体地，若矩阵 $A = [a_{ij}]$ 满足 $a_{ij} = a_{kj}$, $j = 1, 2, \dots, n$ ，则行列式 $|A|$ 中的下列两项的和为 0:

$$\begin{aligned} & (-1)^{\tau(j_1, \dots, j_i, \dots, j_k, \dots, j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{kj_k} \cdots a_{nj_n}, \\ & (-1)^{\tau(j_1, \dots, j_k, \dots, j_i, \dots, j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{ij_k} \cdots a_{kj_i} \cdots a_{nj_n} \end{aligned}$$

由 $a_{ij_i} = a_{kj_i}$, $a_{kj_k} = a_{ij_k}$ ，我们得到上面两项乘积相等，但是逆序差一个对换，所以和为 0。□

性质 5 (两行成比例则行列式为零) 如果行列式中有两行成比例，那么行列式为零。

证明. 提出其中一行的比例因子后，化为两行相同的情形。□

性质 6 (一行的倍数加到另一行，行列式不变) 把某一行的 c 倍加到另一行，行列式不变。

证明. 由线性性，新行列式等于原行列式加上另一个行列式的 c 倍；后一个行列式有两行相同，故为零。□

性质 7 (交换两行，行列式反号) 对换行列式中的两行，所得行列式等于原行列式的相反数。

证明. 设要交换第 i, k 行。先把第 k 行加到第 i 行，再把新第 i 行的 -1 倍加到第 k 行，最后把新第 k 行加到第 i 行，并从第 k 行提出因子 -1 。前三步不改变值，最后一步使行列式反号。□

三种初等行变换对行列式的影响

变换	对行列式的影响
$R_i \leftarrow kR_i, k \neq 0$	乘以 k
$R_i \leftarrow R_i + cR_j, i \neq j$	不变
$R_i \leftrightarrow R_j$	乘以 -1

列变换的规则完全相同。

例 2.4.1 (对角元为 a 、非对角元为 b) 计算

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

解. 把第 $2, 3, \dots, n$ 列依次加到第 1 列, 提出第 1 列的公因子 $a + (n-1)b$; 再把第 $2, \dots, n$ 行分别减去第 1 行, 得到

$$D_n = [a + (n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}.$$

因此

$$D_n = [a + (n-1)b](a-b)^{n-1}. \quad (2.6)$$

□

例 2.4.2 (奇数阶反称行列式) 设 $a_{ij} = -a_{ji}$, 即行列式为反称行列式。证明当 n 为奇数时, 行列式等于零。

证明. 由 $a_{ii} = -a_{ii}$ 得 $a_{ii} = 0$ 。转置行列式等于原行列式; 另一方面, 转置后每个元素等于原元素的相反数, 从每一行提出 -1 得

$$D = (-1)^n D.$$

当 n 为奇数时, $D = -D$, 故 $D = 0$ 。

□

§5 行列式的计算

上一节的性质把行列式计算化为矩阵的初等变换。为便于叙述, 先引入矩阵语言。

定义 5 由 sn 个数排成的 s 行（横的） n 列（纵的）的表

$$A = (a_{ij})_{s \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}$$

称为一个 $s \times n$ 矩阵。 a_{ij} 称为矩阵的 (i, j) 元素。 $n \times n$ 矩阵也称为 n 阶方阵，其行列式记作 $|A|$ 。

定义 6 数域 $\mathbb{P}$ 上矩阵的初等行变换是下列三种变换：

1. 以 $\mathbb{P}$ 中一个非零的数乘矩阵的某一行；
2. 把矩阵某一行的 c 倍加到另一行，其中 $c \in \mathbb{P}$ ；
3. 互换矩阵中两行的位置。

相应地可定义初等列变换，二者统称为初等变换。

矩阵若满足：任一非零行从第一个非零元素起，其下方元素全为零；且零行都位于非零行下方，则称为**阶梯形矩阵**。任意矩阵经过一系列初等行变换都能化为阶梯形矩阵。

对于方阵 A ，用初等变换将它化为上三角形方阵 J 。若变换过程中交换了 s 次行，并把若干行分别乘以非零数 $k_1, \dots, k_r$ ，则

$$|A| = (-1)^s (k_1 \cdots k_r)^{-1} |J|.$$

通常最好只使用“某行的倍数加到另一行”，必要时再交换行，尽量避免引入分数。

化三角形法

1. 在当前列选择一个方便的非零主元，必要时交换行；
2. 用 $R_i \leftarrow R_i + cR_j$ 消去主元下方元素；
3. 对右下角子块重复；
4. 上三角行列式等于主对角线元素的乘积，再补上交换行和倍乘行造成的因子。

例 2.5.1 (教材中的四阶计算) 计算

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 8 & -7 & -10 \end{vmatrix}.$$

解. 先交换第 1, 2 行, 行列式反号; 再依次作倍加行变换:

$$D = - \begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & -13 & 25 & 17 \\ 0 & 26 & -34 & -26 \\ 0 & 26 & -33 & -24 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & -13 & 25 & 17 \\ 0 & 0 & 16 & 8 \\ 0 & 0 & 17 & 10 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & -13 & 25 & 17 \\ 0 & 0 & 16 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{vmatrix}.$$

故

$$D = - \left(1 \cdot (-13) \cdot 16 \cdot \frac{3}{2} \right) = 312.$$

□

说明 1 由消元法计算一个 n 阶数字行列式, 乘除运算次数是三次数量级; 这远少于按定义处理 $n!$ 项。实际计算时还可以交替使用初等行变换和初等列变换。

§6 典型行列式——范德蒙行列式

例 2.6.1 (范德蒙德行列式) 证明

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j). \quad (2.7)$$

证明. 对 n 作归纳。当 $n = 2$ 时结论显然。对一般 n , 从最后一行起依次用第 k 行减去第 $k - 1$ 行的 a_1 倍, 得到第一列除首项外全为零。按第一列展开, 并从其余每列分别提出 $a_j - a_1$, 有

$$V_n = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \cdots (a_n - a_1) V_{n-1}(a_2, \dots, a_n).$$

由归纳假设即得公式 (2.7)。

□

例 2.6.2 (块三角形行列式) 若矩阵按块写成

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix},$$

其中 A 为 k 阶方阵, B 为 r 阶方阵, 则

$$\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix} = |A| |B|.$$

证明. 对 k 归纳, 并沿上部块所在的行逐次展开. 只有选取 A 中元素的项可能非零, 最后分解为两个行列式的乘积. $\square$

§7 克拉默 (Cramer) 法则

考虑方程个数与未知量个数相等的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \quad (2.8)$$

记系数矩阵为 $A = (a_{ij})$, 系数行列式为 $d = |A|$. 令 d_j 表示把 A 的第 j 列换成常数项列 $(b_1, \dots, b_n)^\top$ 所得行列式.

定理 2 (克拉默法则) 若 $d = |A| \neq 0$, 则方程组 (2.8) 有且只有一个解, 且

$$x_1 = \frac{d_1}{d}, \quad x_2 = \frac{d_2}{d}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{d_n}{d}. \quad (2.9)$$

证明. 先验证公式给出的数确为解. 由于

$$d_j = \sum_{s=1}^n b_s A_{sj},$$

对第 i 个方程的左端有

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{d_j}{d} &= \frac{1}{d} \sum_{j=1}^n a_{ij} \sum_{s=1}^n b_s A_{sj} \\ &= \frac{1}{d} \sum_{s=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} A_{sj} \right) b_s = \frac{1}{d} \cdot db_i = b_i. \end{aligned}$$

再证唯一性. 若 $(c_1, \dots, c_n)$ 是任一解, 将第 i 个方程乘以 A_{ik} 并对 i 求和, 得到

$$dc_k = d_k,$$

故 $c_k = d_k/d$. 于是任一解都等于公式 (2.9) 给出的解. $\square$

例 2.7.1 (四元线性方程组) 解

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9, \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5, \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$$

解. 系数行列式及四个替换行列式分别为

$$d = 27, \quad d_1 = 81, \quad d_2 = -108, \quad d_3 = -27, \quad d_4 = 27.$$

因此

$$x_1 = 3, \quad x_2 = -4, \quad x_3 = -1, \quad x_4 = 1.$$

□

常数项全为零的线性方程组称为**齐次线性方程组**。它总有零解 $(0, \dots, 0)$ 。

定理 3 若 n 个方程、 n 个未知量的齐次线性方程组的系数行列式 $|A| \neq 0$, 则它只有零解。换言之, 若它有非零解, 则必有 $|A| = 0$ 。

证明. 由克拉默法则, 所有 d_j 都因替换列为零列而等于零, 所以唯一解为

$$\left(\frac{d_1}{d}, \dots, \frac{d_n}{d}\right) = (0, \dots, 0).$$

□

例 2.7.2 求参数 λ 使方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 = 0, \\ x_1 + \lambda x_2 = 0 \end{cases}$$

有非零解。

解. 非零解存在的必要条件是

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0.$$

故 $\lambda = \pm 1$ 。直接代入可验证两种情形均有非零解。

□

说明 2 克拉默法则揭示了解与系数之间的明确关系, 但若用于数值计算, 需要计算 $n+1$ 个 n 阶行列式, 效率通常不如消元法。它更重要的价值在理论分析。

§8 拉普拉斯 (Laplace) 定理与行列式的乘法规则

按一行或一列展开是对 1 阶子式的展开。拉普拉斯定理把它推广到任意阶子式。

定义 7 在 n 阶行列式 D 中任意选定 k 行与 k 列, 位于这些行列交点上的 k^2 个元素按原次序组成的 k 阶行列式 M , 称为 D 的一个 k 阶子式。删去这 k 行、 k 列后, 余下元素按原次序组成的 $n-k$ 阶行列式 M' 称为 M 的余子式。 M 与 M' 称为一对互余的子式。

定义 8 设 k 阶子式 M 所在的行指标为 $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$, 列指标为 $j_1 < j_2 < \cdots < j_k$, 其余子式为 M' . 称

$$(-1)^{i_1+\cdots+i_k+j_1+\cdots+j_k} M' \quad (2.10)$$

为 M 的代数余子式。

引理

行列式 D 的任意一个子式 M 与它的代数余子式 A 的乘积 MA 中, 每一项都是 D 的展开式中的一项, 而且符号一致。

证明. 先把选定的行、列分别通过对换移到前 k 行、前 k 列。所需对换次数的奇偶性为

$$(i_1 + \cdots + i_k) + (j_1 + \cdots + j_k) - 2(1 + 2 + \cdots + k),$$

因此产生的符号正是公式 (2.10) 中的符号。此时 M 位于左上角, M' 是它的余子式, 二者展开式中的任意两项相乘, 恰从每一行、每一列各取一个元素, 且符号与 D 中相同。□

定理 4 (拉普拉斯定理) 在行列式 D 中任意取定 k 行, 其中所有 k 阶子式与各自代数余子式的乘积之和等于 D 。

证明. 固定的 k 行与任取的 k 列确定一个 k 阶子式, 共有 $\binom{n}{k}$ 个。每个子式有 $k!$ 项, 其代数余子式有 $(n-k)!$ 项。由上述引理, 所有乘积中的项都是 D 的展开项, 且无重复。总项数为

$$\binom{n}{k} k!(n-k)! = n!,$$

恰等于 D 的展开项数, 故所有项正好构成 D 。□

例 2.8.1 (按两行作拉普拉斯展开) 计算

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

解. 固定前两行, 共有六个二阶子式。按拉普拉斯定理:

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ &\quad + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 8 + 6 - 1 + 5 - 18 - 7 = -7. \end{aligned}$$

□

定理 5 (行列式的乘法规则) 设 $A = (a_{ij})$ 与 $B = (b_{ij})$ 为两个 n 阶方阵, 定义 $C = (c_{ij})$, 其中

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}. \quad (2.11)$$

则

$$|C| = |A| |B|. \quad (2.12)$$

证明. 构造 $2n$ 阶行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & 0 \\ -I_n & B \end{vmatrix}.$$

按前 n 行作拉普拉斯展开, 只有选择左上角的 A 才可能得到非零子式, 故

$$\Delta = |A| |B|.$$

另一方面, 利用倍加行变换, 把下部第 $1, \dots, n$ 行分别按 A 的各列倍数加到上部各行, 可以把左上块消为零, 并把右上块变为 C 。于是

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & C \\ -I_n & B \end{vmatrix}.$$

再按前 n 行作拉普拉斯展开, 唯一非零的 n 阶子式是 C ; 其代数余子式的符号与 $|-I_n|$ 合并为正, 故 $\Delta = |C|$ 。两式比较即得公式 (2.12)。□

在矩阵乘法记号下, 公式 (2.11) 表示 $C = AB$, 所以定理 5 可简写为

$$\det(AB) = \det(A) \det(B).$$